5

3° ESO

Lenguaje algebraico

ÍNDICE:

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

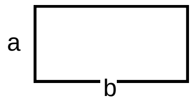
LENGUAJE ALGEBRAICO

• Es el que expresa relaciones numéricas en que intervienen cantidades variables o cantidades desconocidas. Por no tener un valor fijo; o bien, por ser desconocido, se representan mediante letras.

Toda expresión numérica que exprese relaciones numéricas con cantidades desconocidas o variables; es decir, que contenga letras se llama **expresión algebraica.**

• Esto ocurre en las fórmulas…

Por ejemplo:



$S = b \cdot a$.

La superficie de un rectángulo es la base por la altura. Esto es una fórmula.

y en las ecuaciones:

• Un número (x) más el siguiente (x + 1) suman 15. ¿De qué números se trata?

Esto me da : $x + (x + 1) = 15$. Esto es una ecuación.

• Estas situaciones utilizan letras y el objetivo de este tema es saber operar con expresiones que contienen letras.

• A las letras se les llama variables o indeterminadas.

¿Cuántas variables tiene esta expresión? $a^2 - b^2 + ab - a^2b^2$:

¿Y esta otra? $xy - x^2 + y^3 - 3z + 1$:

Valor numérico de una expresión algebraica

¿Qué valor toma la 1ª expresión si el valor de a = 2 y el de b = 3?

¿Lo mismo para la 2ª si el valor de x = –2 y el de y = 3?

• El Álgebra es la parte de las matemáticas que estudia el lenguaje simbólico y la forma de operar con él. Al–Khuwarizmi, matemático árabe a principios del s. IX en su obra *Aritmética*, difunde en el mundo árabe las cifras hindúes y el uso del cero, y en la obra *Álgebra* (Ciencia de la transposición y de la reducción), muestra como pasar en una ecuación un término de un miembro a otro y la reducción de términos semejantes. En su obra designa a la incógnita con la palabra «cosa».

Cubo más cosa igual a diez : $x^3 + x = 10$

HISTORIA DE LOS SIGNOS

• Fue el matemático inglés Robert Recorde quien en 1557 propone el símbolo «=» para designar igual. Dice él en su libro:

Pondré un par de paralelas porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales.

Sin embargo, tuvo que transcurrir más de un siglo para que este símbolo se impusiese.

• Michael Stifel, matemático alemán del siglo XVI consiguió que los signos germánicos + y — se impusiese sobre los signos latinos: *o* y *m* para designar la adición y la sustracción. También propuso utilizar una única letra para representar las incógnitas de los problemas.

• El aspa, *x*, como símbolo de la multiplicación, fue introducida por el matemático y teólogo inglés W. Ougtred, a comienzos del siglo XVII. Fue G. Leibniz el primer matemático que utilizó el punto, **•**, y los dos puntos, **:**, para el producto y la división, finales del XVII.

• Los paréntesis fueron utilizados por primera vez por F. VIETA (1540–1603), quien también generalizó el uso de letras en las fórmulas.

• Los signos > y < fueron introducidos por el inglés HARRIOT en 1631.

2. MONOMIOS

Es la unidad elemental de una expresión algebraica; es decir, que contenga letras. Por ejemplo, $5x^3$, $-9abx$, $3x^2$. Se dicen enteros porque sus coeficientes son números enteros.

Consta de

$7 \cdot$	x^2ytm^3	$2+1+1+3=7$
Parte numérica. Coeficiente	Parte literal. Variables y sus exponentes	Grado del monomio

A la suma de los exponentes de la variables se le llama **grado del monomio**:

Monomio	**Coeficiente**	**Parte literal**	**Grado**
$6xy^3$			
$\frac{3}{2}xyz^2$			
13			

Se llama monomio entero a los que los exponentes son números naturales.

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

Por ejemplo,

SUMA Y RESTA DE MONOMIOS SEMEJANTES

Se suman o restan los coeficientes y se mantiene la parte literal.

$3x^2y + 6x^2y = 9x^2y$

$5x^3 + 7x^3 = 12x^3$

$-3x^2 - 8x^2 =$

$3x^2y - 6x^2y = -3x^2y$

$-3x^4 + 8x^4 =$

PRODUCTO DE MONOMIOS

Se multiplican los coeficientes y las partes literales según las reglas de las potencias

$2x^3 \cdot 5x^5 = 2 \cdot 5 \cdot x^3 \cdot x^5 = 10x^8$

$x^5 \cdot (-3x) =$

$-3x^3 \cdot 4x^6 =$

$4x^2yt \cdot 5xy^3zt^2 =$

$2x^2yz \cdot 4xty =$

Cociente

a) $\frac{8x^6}{2x^3} = \frac{8}{2}x^{6-3} = 4x^3$

b) $\frac{12x^7}{3x^3}$

c) $\frac{6x^5}{3x}$

DIVISIÓN DE MONOMIOS

Se dividen los coeficientes y se simplifican las variables según las reglas de las potencias.

Si el resultado no es un monomio tendremos una fracción algebraica; es decir el cociente de dos polinomios.

$$\frac{14x^3y^5z^4}{7x^2y^2z}$$

$$\frac{15x^3y}{5xy^2z^3}$$

3. POLINOMIOS

La suma de varios monomios enteros

Binomio, trinomio,…etc.

Grado de un polinomio el mayor de los grados de los monomios que lo forman

Término independiente el que no tiene parte literal; es decir, es de grado 0.

Dos polinomios son iguales cuando los términos que los forman son iguales.

En el caso anterior: $4x^3 + 2x^2 - 7x + 2$, el grado es 3

Completa la tabla para el polinomio anterior: $4x^3 + 2x^2 - 7x + 2$

Coeficiente del término de grado 3	Coeficiente del término de grado 2	Coeficiente del término de grado 1	Coeficiente del término de grado 0

Suma y diferencia

Para sumar dos polinomios se suman los términos semejantes:

$(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) + (2x^3 - 6x^2 + 5x - 3) =$

Restar es sumar el opuesto:

$(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) - (2x^3 - 6x^2 + 5x - 3) =$

Producto de polinomios

Se multiplican aplicando la propiedad distributiva. Cada término del primero por cada término del segundo y después agrupando los términos semejantes.

Hacer dibujo del producto de (x+y+z)·(a+b) como rectángulo de distintas parcelas.

$2x^2 \cdot (3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) =$

Más difícil:

$(2x^2 - 3x)^3(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) =$

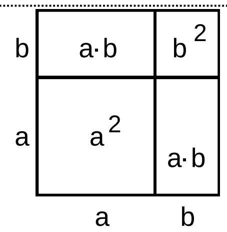
Si multiplico un polinomio de grado *n* por otro de grado *m* el resultado es de grado *n* + *m*

• Los cuadrados de expresiones algebraicas —que continen letras— se hacen así:

a) $(5a)^2 = 5a.5a = 25a^2$

b) $(1+x)^2 = (1+x)(1+x) = 1 + x + x + x^2 = 1 + 2x + x^2$

PRODUCTOS NOTABLES

• $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}$ Por ejemplo, $(5 + b)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot b + b^2 =$	
• $\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}$ Por ejemplo, $(3 - x)^2 =$	
• $\mathbf{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$ Por ejemplo, $(2 + b) \cdot (2 - b) =$	

4. IDENTIDADES

5. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO

Dividiendo cada término por él. Si en algún término no es posible la división el resultado no sería un polinomio entero sino una fracción algebraica.

$$\frac{12x^4yz^2 - 4ax^2y^3 + 6x^2y}{2x^2y}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2}$$

DIVISIÓN ENTERA DE POLINOMIOS

División entera de números naturales: $13 = 5 \cdot 2 + 3$

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 2 \end{array}$$

En vez de sacar decimales se deja un resto.

$$D = d \cdot c + r$$

Dividendo es igual a divisor por cociente más resto.

Esta es la división posible con los polinomios. Si el resto es 0 la división es exacta. El dividendo se dice que es divisible por el cociente o que es múltiplo de él. También es un factor y lo descompone.

El grado del resto es inferior al del divisor.

Ej:

$$2x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 9x - 1 \;\; |\underline{\,x - 1\qquad\qquad}$$

$$3x^4 \;-\; 7x^3 \;-5x^2 \;+\; 9x \;-\; 5 \;\; |\underline{\,x^2 \;-\; 3x \;+\; 2}$$

En los polinomios como dependen de la variable *x* se pone así:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$$

Completa pues la tabla siguiente para la división anterior:

Dividendo	D(x) =
Divisor	d(x) =
Cociente	c(x) =
Resto	r(x) =

Por tanto según lo anterior quedaría:

$3x^4 - 7x^3 \;\; - 5x^2 \;\; + \;\; 9x \;\; - \;\; 5 \; =$

Ejercicio.– Haz la siguiente división: $-3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 8 : -x^2 + x$

* Es aplicable la regla del 9. Sería como valorarla en el caso de x=1

REGLA DE RUFFINI

Es un método abreviado de división.
Pero sirve **sólo** para dividir un polinomio entre x – a.
Es decir, entre x – 3; x – 7; x ; x + 5 = x –(–5)
¿Cuánto vale *a* en cada caso?

Caso	x – 3	x – 7	x	x + 5	x + 2
Valor de *a*					

Vamos a aplicar la regla al siguiente caso:

$(2x^3 - 6x^2 - 5x - 2):(x - 4)$

Completa pues la tabla siguiente para la división anterior:

Dividendo: D(x) =	**Divisor:** d(x) =
Resto: r(x) =	**Cociente:** c(x) =

Si falta algún término del polinomio es que su coeficiente es **0**. Como es lógico también hay que ponerlo:

Dividir: $x^3 + 7x^2 - 6 : x + 2$

TEOREMAS DEL RESTO Y DEL FACTOR

Estos teoremas no hace falta verlos teóricamente, se pueden obtener de la práctica.

TEOREMA DEL RESTO

El resto de dividir un polinomio P(x) entre (x–a) es igual al valor numérico del polinomio P(x) para x=a; es decir, R=P(a)

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x\text{-}a \\ \cline{2-2} R & C(x) \end{array}$$

Entonces P(x) = (x–a)·C(x) + R. Sustituyendo en x = a se deduce.

TEOREMA DEL FACTOR

Si un número «a» es raíz de un polinomio entonces «x – a» lo descompone.

Se deduce de lo anterior:
Si hacemos la división anterior tendríamos:
P(x) = (x–a)·C(x) + R.
Sustituyendo en x = a se deduce que R = 0. Es decir, efectivamente lo descompone.

Por ejemplo,

3 es una raíz de $x^2 - 5x + 6$: $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

Si dividimos $x^2 - 5x + 6 : x - 3$

resulta: $x^2 - 5x + 6 = (x - 3) \cdot (x - 2)$

Es decir, la factoriza.

Por tanto, para factorizar un polinomio lo primero que tenemos que hacer es buscar sus raíces o soluciones.

Pero atención, este procedimiento sólo me da las raíces enteras de un polinomio. Es decir, que no sirve para encontrar raíces racionales o irracionales.

RAÍCES DE UN POLINOMIO

Se llama raíz de un polinomio o cero del polinomio a un valor que lo anula.

a es raíz de P(x) $\Leftrightarrow$ P(a)=0.

Un polinomio puede tener tantas raíces como sea su grado.

CÁLCULO DE LAS RAÍCES ENTERAS DE UN POLINOMIO

Se encuentran entre los divisores del término independiente.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de polinomios.

Por ejemplo, $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

¿Cómo se factoriza un polinomio?

Al igual que para las números naturales encontrando divisores. Es decir, polinomios que al hacer la división den de resto 0.

Para conseguirlo utilizaremos la regla de Ruffini, buscando polinomios de grado 1 que me den de resto 0 para que lo descomponga.

$x^2 - 5x + 6$	$x^2 + x - 2$

$x^2 + 8x + 7$	$x^2 + 2x + 2$

Hay una regla para saber con que números enteros hay que probar. Para buscar las raíces lo haremos entre los divisores del término independiente.

En el caso del polinomio

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12 son las posibles raíces.

En el segundo: $x^3 + x^2 - 5x + 3$

±1, ±3 son las posibles raíces enteras.

Vamos a descomponerlos:

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$:	$x^3 + x^2 - 5x + 3$:

Si no tienen término independiente *x* es un factor directo:

$x^3 - 2x^2 + x = x \cdot (x^2 - 2x + 1)$	$x^3 + 3x^2 - x - 3$

A los polinomios que no se pueden descomponer se les llama irreducibles.

Estos son los de grado 1 y los de grado 2 que no tienen raíces.

Por ejemplo, indica si son irreducibles y por qué:

Polinomio	Irreducible	¿Por qué?
$3x + 6$		
$x^2 - 5x + 6$		
$x^3 + 3x^2 - 4x - 12$		
$x^2 + x + 1$		

La descomposición factorial de un polinomio está relacionada con sus raíces de la siguiente manera. Por ejemplo, aquí tenemos un polinomio desarrollado y su descomposición factorial. ¿Cuáles son sus raíces o valores que lo anulan?

$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2) = 0.$

¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

Un polinomio $P(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)$

Ejemplo. - Factorizar el polinomio $4x^3 - 4x^2 - 16x + 16$

6. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Son fracciones de polinomios. Por ejemplo, $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

Escribe el valor que toma la fracción algebraica para los valores indicados:

Fracción	x = 0	x = 1	x = 2
$\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$	$\dfrac{0^2 + 2 \cdot 0 + 1}{0 + 1} = \dfrac{1}{1} = 1$		
$\dfrac{2x^2 - x}{x^2 + x + 1}$			

Con las fracciones algebraicas se opera como con las fracciones de números enteros.

Para sumar y restar primero hay que reducir a común denominador

$$\frac{x + 7}{x} + \frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{(x + 7)(x + 1)}{x(x + 1)} + \frac{(2x - 1)x}{(x + 1)x} = \frac{(x^2 + 8x + 7) + (2x^2 - x)}{x^2 + x} =$$

Para multiplicar:

$$\frac{x + 7}{x} \cdot \frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{(x + 7)(2x - 1)}{x(x + 1)}$$

Para dividir:

$$\frac{x + 7}{x} : \frac{2x - 1}{x + 1} =$$

Se puede **simplificar una fracción algebraica** descomponiendo el numerador y el denominador y eliminando los factores comunes. Como con las fracciones numéricas:

$$\frac{x^2+8x+7}{x^2+x}=\frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)}=$$